

ФИЛОСОФСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

Годарев-Лозовский М. Г.

Институт исследований природы времени, гг. Москва – Санкт-Петербург (Россия)

Введение. В статье проведен философский анализ первой проблемы Гильберта в основаниях математики и анализ попыток ее решения ученым сообществом. Предложен новый и оригинальный подход к концептуальному решению континуум-гипотезы Г. Кантора.

Методы. К числу использованных методов можно отнести диагональный метод Г. Кантора, аксиому Лозовского о различной мощности множеств знаков периодической и непериодической дробей, результаты К. Геделя и П. Козна по континуум-гипотезе, метод сечения Р. Дедекинда, созидаящий иррациональное число.

Основные идеи исследования, полученные результаты и их обсуждение. Потенциально бесконечное множество знаков периодической дроби имеет мощность конечного множества, а актуально бесконечное множество знаков непериодической дроби имеет мощность счетного множества. На основе этой аксиомы обоснована гипотеза: на отрезке числовой прямой $[0,999..., 1,000...]$ существуют: несчетное множество иррациональных чисел вида $0,999...1415926535...;$ конечное множество рациональных чисел вида $0,999...;$ всюду плотное множество мета рациональных чисел вида $0,999...5$. Таким образом, первая проблема Гильберта зависит от различения актуальной и потенциальной бесконечностей, обобщения понятия рационального числа, и она зависит от ответа на следующие вопросы: существуют ли на отрезке числовой прямой $[0,999..., 1,000...]$ числа иного поколения, то есть мета рациональные: $0,999...1; 0,999...2; 0,999...3; ...$ и если существуют, то обладает ли их множество промежуточной мощностью между счетным множеством и континуумом?

Заключение. Исторический урок разрешения первой проблемы Гильберта сводится к тому, что иногда фундаментальная научная проблема не разрешается, но забывается, становится неактуальной для ученого сообщества, «загоняется в дальний угол». Философский урок заключается в том, что проблемы в основаниях математики всегда междисциплинарные и должны сообща решаться философами и математиками.

Ключевые слова: актуальная и потенциальная бесконечность, мощность множества, взаимно однозначное соответствие, числовая прямая.

Введение. Дефундаментализация и прикладнизация науки, уход ее в технологизацию, прагматизация науки, узкая специализированность, мелкотемье, слабая готовность к междисциплинарному диалогу, формализация науки, разрушение научных школ и утрата преемственности научных поколений. Вот лишь краткая выдержка из значительно более полного списка социальных проблем науки, списка, который приводит в своей программной статье большой философ и замечательный ученый В. П. Шалаев [1, с. 42].

Несмотря на то что первая проблема Гильберта (первая!) имеет более чем вековую историю, она практически забыта, что совершенно не случайно. Ведь наука действительно больна и больна серьезно... Мы предлагаем философское

разрешение первой проблемы Гильберта на основе различения потенциальной и актуальной бесконечности и допущения существования иного поколения чисел – мета рациональных.

Методы исследования. Б. Рассел в «Проблемах философии» пишет: «Рассмотрим, например, доказательства в геометрии. Самоочевидности аксиом, из которых мы исходим, недостаточно: на каждом шаге доказательства должна быть очевидна связь посылок и заключения. То, во что мы твердо верим, если оно не является истинным, называется *ошибкой*. То, во что мы твердо верим, если оно не является ни знанием, ни ошибкой, а также то, в отношении чего мы колеблемся, поскольку оно выведено из чего-то, что не имеет высочайшей степени очевидности, может быть названо *вероятностным мнением*. Таким образом, большая часть из того, что принято считать знанием, является вероятностным мнением... простая организация вероятностного мнения никогда не превратит его в неоспоримое знание» [2, с. 93].

К сожалению, математики часто не задумываются над философскими и методологическими проблемами своей науки, однако существуют и исключения из правил. Например, С. В. Ларин, указывая на необходимость другой трактовки понятия представимости действительного числа десятичной дробью, строго математически обосновывает то, что «...в записи $0, c1, c2...$ девятка не может повторяться бесконечное число раз подряд» [3, с. 99-100, 76–80]. Однако часто математики необоснованно полагают, что если между числами 0, (9) и 1, (0) невозможно представить себе какого-либо действительного числа, то сами эти числа 0, (9) и 1, (0) представляют собой одно и то же число (?).

Мы предлагаем рассмотреть неортодоксальную гипотезу, базирующуюся на следующей аксиоме, которая лежит в основании математики: *потенциально бесконечное множество знаков периодической дроби имеет мощность конечного множества, а актуально бесконечное множество знаков непериодической дроби имеет мощность счетного множества*.

Основанием, предшествующим возможному доказательству того, что множество промежуточной мощности существует, является вышеприведенная аксиома Лозовского. Эта исходная аксиома названа в память о Максиме Семеновиче Лозовском, деде автора статьи. М. С. Лозовский, будучи инвалидом, ушел в ополчение и погиб в 1942 году под Синявино [4, с. 213–218].

Но в чем различия актуально и потенциально бесконечных множеств?

Актуально бесконечное множество – это множество, правильная часть которого эквивалентна целому. Актуально бесконечное множество не производно от потенциально бесконечного множества путем простого увеличения числа элементов последнего, то есть оно не достижимо путем математической индукции с помощью индукционного перехода $n+1$.

Потенциально бесконечное множество – это множество, которое в каждый конечный момент конечно и содержит k элементов, однако для таких множеств в любой следующий момент времени можно добавить еще один элемент: $k+1$. Подобное означает: потенциально бесконечное множество – это множество, которое обладает неопределенно большим, но конечным по мощности множеством элементов.

«Очевидно, что всякая совокупность либо конечна, либо бесконечна, и эти оба случая исключают друг друга. Легко также убедиться, что актуально-бесконечный класс нельзя задать по объему: если бы оказалось возможным пересчитать его члены, то, как мы видели выше, этот класс был бы конечным. Следовательно, никакое число натурального ряда не может служить выразителем мощности актуально бесконечной совокупности; это, однако, не значит, что здесь уже совсем нельзя говорить о числе. Великая заслуга Г. Кантора в том и состоит, что он расширил наше понятие о числе, введя особые трансфинитные числа» [5, с. 12].

«Такая бесконечность, которая резко отличается от рассмотренной выше (то есть актуальной – *авт.*) отсутствием полной определенности, – ведь мы имеем здесь дело с переменной, – называется потенциальной. Некоторые математики склонны утверждать, что это единственная бесконечность, допустимая в их науке; но, как остроумно заметил Г. Кантор, потенциальная бесконечность уже предполагает актуальную. Для нас важно отметить, что в подавляющем большинстве случаев областью изменения переменной служит актуально-бесконечная совокупность» [5, с. 16].

Для ясности определим *потенциально бесконечно малую величину* – как величину, которая бесконечно убывает в процессе приближения к нулю числа S_n при неограниченном возрастании n . Эта величина так же, как и обратная ей, то есть потенциально бесконечно большая, играет очень важную роль в классическом математическом анализе. Для нас особенно важно то, что в категории потенциальной бесконечности $n+1$ мы не вправе говорить о натуральном ряде как о совокупности *всех* натуральных чисел $[N]$ или как об актуально бесконечном счетном множестве.

А. В. Родин отмечает: «В современной математике бесконечность понимается двояко – либо как актуальная бесконечность в духе Кантора, либо как потенциальная бесконечность в духе Коши и Вейерштрасса. Понимая бесконечность потенциально, говорят, что натуральный ряд бесконечен в том смысле, что всякий конечный набор следующих друг за другом натуральных чисел от 0 до N может быть расширен путем добавления к нему следующего за N числа $N+1$... Понимая бесконечность актуально, говорят, что возможность расширить всякий данный набор натуральных чисел есть *не определение, но следствие* бесконечности натурального ряда, саму же эту бесконечность следует мыслить как актуальную данность всего натурального ряда сразу» (выделено курсивом – *авт.*) [А. В. Родин, 6, с. 308].

Аналогичное положение сложилось и в геометрии: «Чтобы мыслить неограниченное продолжение прямой, необходимо заранее мыслить актуально бесконечное пространство, в котором эта прямая продолжается» [С. Л. Катречко, 6, с. 328]. Таким образом, в математике в целом область изменения потенциально бесконечной величины представляет собой актуально бесконечное множество [В. А. Шапошников, 6, с. 375].

По поводу неразличения математиками мощности множества знаков периодических и непериодических десятичных дробей А. А. Зенкин пишет: «есть... *конечный* символ ... *конечного* алфавита десятичных знаков соответствующих бесконечных *последовательностей* 3,1415..., 2,7182..., 1,4142... (здесь и далее целую часть мы игнорируем, чтобы не выйти за пределы отрезка $[0, 1]$). Работающая с неизменной эффективностью математика полностью игнорирует важнейший с точки зрения философии (и классической теории множеств) вопрос о том, является ли *бесконечный денотат* действительного числа *актуально* бесконечным... или же он является *потенциально* бесконечным» [А. А. Зенкин, 6, с. 185]. Опираясь на аксиому Лозовского, нами предлагается исходить из отсутствия взаимно однозначного соответствия между множествами знаков периодической и непериодической дробей.

Предварим наш последующий анализ тонким наблюдением А. Ф. Кудряшева: «...дурная бесконечность так или иначе сопутствует... профессиональному сознанию ученого любой специальности... характерные для «дурной» бесконечности однообразие и безнадежность процесса, заведомо не имеющего окончания, иногда остаются смутно ощутимыми» [А. Ф. Кудряшев, 6, с. 265–269].

Г. Кантор указывает на необходимость «... рассмотреть те отношения, которые нам встретятся, когда числовые величины заданы в конечном или бесконечном числе... мы можем мыслить числовые величины соотношенными точкам прямой линии. Ради наглядности (а не по существу дела) мы пользуемся далее этим представлением всегда, когда говорим о точках, имея в виду те значения, при помощи которых они заданы.

Заданное конечное или бесконечное число числовых величин я для краткости называю *множеством значений*... Если на конечном интервале задано точечное множество, то вместе с ним вообще задано некоторое второе точечное множество, с последним – некоторое третье и т. д., которые существенны для понимания природы первого множества» [7, с. 14]. То есть, с точки зрения теории множеств Г. Кантора, предлагаемая нами далее гипотеза вполне допустима.

Основные идеи исследования, полученные результаты и их обсуждение

Гипотеза: на отрезке числовой прямой $[0,999..., 1,000...]$ существуют: *несчетное множество иррациональных чисел вида $0,999...1415926535...$; конечное множество рациональных чисел вида $0,999...$; всюду плотное множество мета рациональных чисел вида $0,999...1415926535...$*

нальных чисел вида $0,999\dots 5$. Для обоснования этой гипотезы рассмотрим отрезок числовой прямой $[0,999\dots, 1,000\dots]$.

1. Равенство $0,999\dots = 1,000\dots$ нельзя понимать буквально, то есть как равенство этих чисел на числовой прямой. Необходимо различать нетождественные друг другу понятия: а) *конвенциональное представление* числа $1,000\dots$ дробью $0,999\dots$; б) *неравенство значений* на числовой прямой чисел $1,000\dots$ и $0,999\dots$. Ведь точный смысл этого равенства $0,999\dots = 1,000\dots$ в том, что потенциально бесконечная последовательность $S_1 = 0,9, S_2 = 0,99\dots, S_n, \dots$, как величина, сходится к 1. Однако не существует числа s , к которому бы сходилась последовательность у непериодической дроби [8, с. 24–27]. Только в силу подобного рассуждения достигается единственность значения всякого действительного числа, представленного десятичной дробью.

2. Дробь $0,999\dots$ – есть действительное число на числовой оси. Всякое действительное число можно записать в виде десятичной дроби, а множество всех действительных чисел можно описать как совокупность всех десятичных дробей, как справедливо замечает Л. С. Понтрягин [8, с. 53–56]. Но между числами $0,999\dots$ и $1,000\dots$ на числовой оси присутствует множество других чисел, среди которых и такое, как их среднее арифметическое: $0,9\dots 5$. Рассмотрим это особенно интересующее нас, пока только гипотетически, существующее число.

3. Число $0,999\dots 5$ – не есть рациональное число, так как его невозможно представить в виде обыкновенной дроби с целым числом в числителе и натуральным числом в знаменателе, а также ввиду того, что не существует числа s , к которому бы сходилась последовательность чисел у дроби $0,9\dots 5$.

4. Число $0,999\dots 5$ – не есть иррациональное число, так как оно не имеет актуально бесконечного множества знаков после запятой, как, например, число $3,141\dots$ (Числа с актуально бесконечным множеством знаков после запятой существуют, причем цифры в десятичном представлении этих иррациональных чисел непериодической дробью могут быть какими угодно от 0 до 9 на любой позиции. Однако в десятичном представлении рационального числа периодической дробью цифры в периоде строго упорядочены, например, в числе $0,999\dots$).

5. Только число, имеющее в десятичном представлении актуально (но не потенциально!) бесконечное множество знаков, является иррациональным. Однако из того, что иррациональное число, представляемое непериодической дробью, не существует в виде обыкновенной дроби, логически не следует то, что у каждого *не являющимся рациональным* числа, в его десятичном представлении, должно быть именно *актуально* бесконечное множество знаков после запятой.

6. Число $0,999\dots 5$ не имеет актуально бесконечного множества знаков после запятой и, соответственно, оно не есть иррациональное число. Но это число не является и *вполне рациональным*, так как оно не представлено периодической дробью, но

представлено квази-бесконечной непериодической дробью. Ко всякой периодической десятичной дроби, как мы полагаем, может быть добавлена некоторая произвольная конечная последовательность цифр, и таким способом образовано новое число вида $0, f_1, f_2 \dots f_n$. Число этого вида образует, таким образом, новое поколение чисел, которые мы назовем мета рациональными.

7. В актуально бесконечном множестве знаков непериодической дроби, представляющей собой нормальное иррациональное число, любая потенциально бесконечная последовательность цифр (в том числе одинаковых) может встретиться на любом месте. Таким образом, если определенно существует иррациональное число, например $0,9\dots141\dots$, и если мы допускаем, что существует рациональное число $0,9\dots$, то мы обязаны будем допустить существование и мета рационального числа вида $0,9\dots141$.

8. Определение: *мета рациональное число* – это действительное число, которое, являясь не вполне рациональным, при этом определенно не является иррациональным числом.

Но почему мета рациональное число существует?

Л. С. Понтрягину принадлежит следующее пространное высказывание во введении к его книге «Обобщение чисел»: «Переход от рациональных чисел к действительным числам вызван скорее *внутренней логикой развития математики*, чем практическими потребностями, так как при помощи рациональных чисел с любой точностью можно осуществить любое измерение. К действительным числам привело математическое открытие, возникающее из теоремы Пифагора и состоящее в том, что длина диагонали квадрата со стороной, равной единице, не может быть измерена точно рациональным числом. *Действительные числа как бы заполняют промежутки между рациональными числами* и приводят к тому, что условие сходимости Коши является не только необходимым, но и достаточным условием сходимости. Этот факт чрезвычайно важен в математике. *Действительные числа представляют собой ту непрерывную среду, в которую помещены рациональные числа.*

Здесь становится совершенно ясным, что для чисел характерно не только наличие действий сложения, вычитания, умножения и деления, но также и понятие предельного перехода, то есть известно, что означает последовательность чисел, сходящаяся к данному числу. Совокупность величин, в которой имеются алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления, а также определен предельный переход, является естественным логически возможным обобщением понятия числа. Оказывается, что таких обобщений вовсе не очень много... Переход от рациональных чисел к действительным опирается на представление о том, что такое малое рациональное число. Оказывается, что, кроме совершенно естественного понятия малости рационального числа, существует другое, связанное с некоторым

простым числом p . Связанное с этим понятием малости расширение рациональных чисел приводит к возникновению p -адических чисел, которые имеют в настоящее время важное применение в теории чисел...» (выделено – *авт.*) [9, с. 6-7].

Итак, действительные числа в соответствии с логикой заполняют промежуток между рациональными числами, в целом представляя собой ту непрерывную среду, в которую помещены рациональные числа.

Мы полагаем, что мета рациональное число должно существовать в силу следующих логических и математических обстоятельств:

1) между двумя близкими рациональными числами во всюду плотном множестве на числовой прямой обязательно должно быть рациональное число или близкое к нему по свойствам, то есть мета рациональное число;

2) потенциально бесконечная десятичная дробь имеет конечное по мощности потенциально бесконечное множество знаков. Потенциальная бесконечность должна пониматься в смысле Г. Кантора, то есть как «несобственная бесконечность»;

3) к потенциально бесконечной периодической дроби справа всегда допустимо добавить еще цифру, отличную от значения периода, и так образовать новое число;

4) между любыми двумя близкими рациональными числами присутствует среднее арифметическое этих чисел, которое может выразить только мета рациональное число вида $0, f_1, f_2 \dots f_n$. Например, между числами $0,999\dots$ и $1,000\dots$ существует мета рациональное число, которое представляет квази-бесконечная непериодическая дробь $0,999\dots 5$;

5) значение всякого действительного числа с необходимостью должно быть единственным;

6) каждое из чисел, включая $0,999\dots$ и $1,000\dots$, представляет только самое себя;

7) непериодическая актуально бесконечная десятичная дробь может начинаться произвольной потенциально бесконечной последовательностью цифр (знаков) после запятой, как, например, дробь $3,142\dots$;

8) цифры (знаки) непериодической дроби непосредственно после запятой могут представлять собой и потенциально бесконечную последовательность одинаковых знаков, например, «девяток»: $0, 9\dots 3142\dots$;

9) иррациональное число $0,9\dots 3142\dots$ имеет право на существование, но важно оговорить то, что в этом числе после цифры 9 знак (...) означает *потенциальную* бесконечность, а после цифры 2 знак (...) означает *актуальную* бесконечность множества знаков;

10) неоднозначность в математике ныне существует не в представлении значения числа 1, а в представлении знака (...);

11) непериодическую десятичную актуально бесконечную дробь всегда можно непротиворечиво сократить до конечной десятичной дроби, которая является ее приближенным значением, как допустимо, например, сократить до приближенного значения число $\pi \approx 3,142$;

12) непериодическую актуально бесконечную дробь всегда можно непротиворечиво представить как: а) актуально бесконечную и несократимую $0,9...3142...$; б) укороченную (сокращенную) до квази-бесконечной непериодической дроби; $0,9...3142$; в) укороченную (сокращенную) до периодической дроби $0,9....$ Ведь, например, последовательность конечных десятичных дробей всегда может быть получена из бесконечной десятичной дроби [8, с. 55].

Какова же мощность множества мета рациональных чисел?

1. Исходя из анализа с привлечением диагонального метода Г. Кантора, *множество мета рациональных чисел не является счетным*. Начав процесс счета, мы сможем продолжать его сколь угодно долго, однако в нем ни на одном шаге не будет иррациональных чисел с актуально бесконечным множеством знаков, а также не будет чисел даже с единственной цифрой после периода, например числа $0,(9)5$. Однако у нас в процессе счета всегда будет присутствовать последующее рациональное число, не подходящее к предыдущим ячейкам, и всегда будет присутствовать номер для этого рационального числа. Однако номер для иррационального числа всегда будет отсутствовать. Все это логически вовсе не означает, что, кроме рациональных чисел на числовой оси, существуют исключительно иррациональные числа.

2. Для мета рационального числа, характерно то, что оно имеет конечное множество цифр после периода, однако при сколь угодно длительном счете мы не обнаружим для него места в диагональной таблице. Но мета рациональное число имеет право существовать на том же самом логическом основании, что и иррациональное число.

3. Исходя из того, что всякое мета рациональное число не содержит актуально бесконечного множества знаков, само *множество всех мета рациональных чисел не может иметь мощность континуума*.

4. *Актуально бесконечная непериодическая дробь, представляющая собой нормальное иррациональное число, имеет структуру, состоящую: а) из актуально бесконечной последовательности различных цифр; б) из последовательностей одинаковых цифр*.

5. *Множество мета рациональных чисел на числовой прямой представляет всюду плотное множество*.

6. *В системе мета рациональных чисел допустимы те же действия, что и в системе целых чисел, но только с числами, расположенными справа от периодической части, то есть сложение и умножение, вычитание и деление. Например, как минимум, допустимы следующие действия с мета рациональными числами:*

$$0, (999 \dots)1 + 0, (999 \dots)4 = 0, (999 \dots)5 \text{ и } 0, (999 \dots)1 * 5 = 0, (999 \dots)5 \text{ и } \\ 0, (999 \dots)5 - 0, (999 \dots)4 = 0, (999 \dots)1 \text{ и } 0, (999 \dots)5 / 5 = 0, (999 \dots)1.$$

Но, возможно, обычная арифметика в данном случае полностью не подходит: операции сложения и умножения, а также всю метрику пространства необходимо будет определять по отношению к мета рациональным числам заново, как это делается, например, в теории p -адических чисел. По поводу метода обобщения рациональных чисел p -адическими числами Л. С. Понтрягин пишет следующее: «Совокупность R всех рациональных чисел составляет поле в силу тех правил сложения и умножения, которые в нем определены. При этом нулем сложения является число нуль, а единицей умножения – число единица, p -адические числа появляются в результате введения в поле R своеобразной топологии, зависящей от заданного простого числа p . Интуитивный смысл этой топологии заключается в том, что рациональное число g считается тем меньше, чем лучше оно делится на заданное простое число p » [9, с. 187].

7. *Существование множества мета рациональных чисел не зависит от системы аксиом Цермело–Френкеля (ZFC) как с аксиомой выбора, так и без нее, но при этом оно не совместимо с континуум-гипотезой Кантора.* То есть континуум-гипотеза верна, если не существует мета рационального числа, и континуум-гипотеза не верна, если существует мета рациональное число. Таким образом, можно утверждать, что вполне допустимо то, что существует множество промежуточной мощности – множество мета рациональных чисел, представляемых квази-бесконечными непериодическими десятичными дробями, то есть множество $T, \mathbb{N} \subset T \subset \mathbb{R}$, которое не эквивалентно ни $\mathbb{N}$, ни $\mathbb{R}$.

Рассмотрим первую проблему Гильберта через призму множества мета рациональных чисел.

Проблемы Гильберта – это список из 23 фундаментальных проблем математики, представленный Давидом Гильбертом на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Первая проблема – это проблема Кантора о мощности континуума. Доказано, что эта проблема неразрешима в теории множеств на основе аксиоматики Цермело–Френкеля (ZFC). Однако нет единого мнения относительно того, является ли это доказательство решением проблемы, а не уходом от этого решения.

Братья Стругацкие в произведении «Понедельник начинается в субботу» с юмором описали подобную существующей сейчас в основаниях математики познавательную ситуацию.

«– Г-голубчики, – сказал Федор Симеонович озадаченно...

– Это же проблема Бен Б-бецалея. К-калиостро же доказал, что она н-не имеет p -решения.

– Мы сами знаем, что она не имеет решения, – сказал Хунта, немедленно ошестиниваясь. – Мы хотим знать, как ее решать.

– К-как-то ты странно рассуждаешь, К-кристо... К-как же искать решение, к-когда его нет? Б-бессмыслица какая-то...

– Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица – искать решение, если оно и так есть. Речь идет о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос...».

Примем за основу одну из допустимых формулировок континуум-гипотезы: с точностью до эквивалентности существуют только два типа бесконечных числовых множеств – счетное множество и континуум. *То есть нет множества на отрезке $[0,1]$, которое было бы несчетным и при этом не континуумом.* Иначе говоря, необходимо с точностью до эквивалентности определить то, что существуют только два типа бесконечных числовых множеств – счетное множество и континуум. Задача сводится к тому, чтобы установить: *существует ли множество промежуточной мощности, то есть такое множество T , $\mathbb{N} \subset T \subset \mathbb{R}$, которое не эквивалентно ни $\mathbb{N}$, ни $\mathbb{R}$?* То есть необходимо доказать, что на отрезке числовой оси $[0,1]$ существует множество, превышающее мощность множества рациональных чисел, но не имеющее мощности континуума.

Континуум-гипотеза – это предположение о том, что мощность континуума c равна первому несчетному кардинальному числу $c = \aleph_1$. Г. Кантор допустил: любое бесконечное подмножество континуума является либо счетным, либо континуальным. Континуум-гипотеза утверждает то, что мощность континуума – наименьшая мощность, превосходящая счетное множество, и «промежуточных» мощностей между счетным множеством и континуумом нет. Но как определяется континуум?

«Прежде всего континуум, будучи совокупностью всех действительных чисел, должен определяться как некое твердое множество... без оставления возможности впоследствии добавлять к нему все новые и новые числа» [10, с. 16]. Добавим, что это утверждение А. Ю. Хинчина относится и к совокупности всех иррациональных чисел, множество которых также имеет мощность континуума и является актуально бесконечным.

Следствием континуум-гипотезы является то, что для любого бесконечного множества действительных чисел всегда можно установить взаимно-однозначное соответствие либо между элементами этого множества и множеством целых чисел, либо между элементами этого множества и множеством всех действительных чисел, а третьего не дано. Доказать континуум-гипотезу – это значит, вывести ее из непротиворечивой системы аксиом. Опровергнуть – значит, показать, что если ее добавить к некоторой системе аксиом, то получится противоречивый набор утверждений.

Известно, что в 1936 году К. Гедель показал: *континуум-гипотеза не может быть опровергнута традиционными средствами теории множеств*. Позже, в 1963 году, уже П. Коэн строго обосновал: *континуум-гипотеза не может быть ни доказана, ни опровергнута с помощью обычных методов теории множеств*. То есть было доказано, что проблема континуум-гипотезы неразрешима в теоретико-множественной аксиоматике Цермело–Френкеля (ZFC). То есть оказалось, что непротиворечивы оба варианта теории множеств: отрицающий континуум-гипотезу и признающий ее.

Ж. П. Шанже и А. Кон пишут: «Если перед нами встает неразрешимый вопрос (например, вопрос о континууме), то нужно всего-навсего сформулировать гипотезу, которая сделает его разрешимым... Когда к системе добавляется гипотеза (например, континуум-гипотеза), нужно, очевидно, убедиться в ее неразрешимости, то есть в двух вещах: во-первых, эта гипотеза не должна выводиться из прежних аксиом системы (теорема Коэна для континуум-гипотезы), а во-вторых, ее отрицание также не должно быть следствием из прежних аксиом (для континуум-гипотезы этот результат был получен Куртом Гёделем)» [11, с. 165].

Однако, как уже отмечалось, нет единого мнения относительно того, являются ли достигнутые результаты решением самой этой проблемы. О подобных затруднениях в науке В. В. Целищев пишет следующее: «Философская проблема тут состоит в том, что эти новые проблемы могут оказаться либо псевдо-проблемами, либо неразрешимыми. Такая ситуация может возникнуть из-за того, что выразительные средства новой теории слишком богаты для постановки вопросов, но недостаточны для их разрешения. Относится ли все вышесказанное к континуум-гипотезе, трудно сказать...» [12, с. 39].

Далее автор констатирует следующее: «Континуум-гипотеза неразрешима в том смысле, что при условии непротиворечивости аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля добавление к ней континуум-гипотезы не приводит к противоречию, так же как не приводит к противоречию и добавление к этой системе отрицания континуум-гипотезы. В некотором смысле в такой ситуации мы имеем две теории множеств, и последняя возможность называется неканторовской теорией множеств... *нынешние математики в целом не разделяют убеждения Кантора в правильности континуум-гипотезы*» (выделено – *авт.*) [12, с. 42]. Если последнее утверждение соответствует действительности, то наша гипотеза должна быть вполне востребована математиками.

Наша гипотеза существования мета рационального числа полезна следующим:

1) становится понятным, почему точка, брошенная на числовую прямую, почти наверняка попадет на иррациональное число, мера Лебега, множества которых равны 1;

2) гипотеза относительно заполняет пробелы на числовой прямой, а ведь сечение Дедекинда рациональным числом связано с пробелами, то есть при нем отсутствуют граничные элементы;

3) гипотеза объясняет полное отсутствие пробелов и наличие единственного граничного элемента при сечении Дедекинда иррациональным числом, тем, что только иррациональное число, в десятичном представлении которого *актуально* бесконечное множество знаков, *актуально* и до основания «рассекает» континуум [13, с. 19–24];

4) гипотеза логически необходима для того, чтобы во всюду плотном совокупном множестве рациональных и мета рациональных чисел, на числовой прямой, на отрезке $[0,999..., 1,000...]$ между этими двумя числами существовало бы бесконечное множество других чисел;

5) гипотеза устраняет известную неоднозначность при буквальном понимании равенства значений двух различных чисел на числовой прямой: $1 = 1,000...$ и $1 = 0,999...$ (Ведь потенциально бесконечная десятичная дробь не имеет актуально бесконечного «хвоста» из девяток. Предположение, что в записи $0,91c2...$ девятка присутствует *актуально*, но не *потенциально* бесконечное множество раз, несостоятельно, ведь значение дроби как действительное число $0,999...$ никогда не станет смежным или равным действительному числу и значению дроби $1,000...$).

Таким образом, первая проблема Гильберта, по нашему мнению, находится в русле различения актуальной и потенциальной бесконечностей, обобщения понятия рационального числа, и она зависит от ответа на следующие очень непростые вопросы: *существуют ли на отрезке числовой прямой $[0,999..., 1,000...]$ числа иного поколения, то есть мета рациональные: $0,999...1$; $0,999...2$; $0,999...3$; ... и если существуют, то обладает ли их множество промежуточной мощностью между счетным множеством и континуумом?*

Очевидно, что для мета рационального числа, так же, как и для иррационального числа, мы не найдем места в диагональной таблице Г. Кантора.

Допустим отдаленную аналогию с деревом как с целым: почва – это нестандартная числовая прямая, многочисленные корни дерева – это множество иррациональных чисел, а рациональное число – это единый ствол дерева. Но неизвестно, существует ли невидимое глазом, возможное раздвоение ствола у его основания – множество «мета рациональных чисел»? Мы полагаем, что затрудняющая познание, по выражению В. В. Целищева, «семантическая избыточность языковых средств описания множеств» устраняется конкретностью поставленных нами ключевых вопросов, связанных с первой проблемой Д. Гильберта [12, с. 9].

Заключение. Каковы возможные заключительные обобщения предлагаемой гипотезы?

1. Всякое рациональное и всякое мета рациональное число могут быть производны от иррационального числа путем, образно выражаясь, «отсечения актуально бесконечного хвоста знаков после запятой» в десятичном представлении иррационального числа.

2. Множество знаков иррационального числа, например числа $0,999...14159... = 0,(9)14159...$, актуально бесконечно. Множество знаков рационального числа, например числа $0,(9) = 0,999...$, потенциально бесконечно (см. аксиому Лозовского). Множество знаков мета рационального числа, например числа $0,(9)14159 = 0,999...14159$, содержит потенциально бесконечное множество знаков плюс конечное множество знаков.

3. Квази-бесконечное множество знаков мета рационального числа по мощности является конечным и промежуточным между счетным актуально бесконечным множеством знаков иррационального числа и потенциально бесконечным множеством (имеющим мощность конечного множества) знаков числа рационального.

4. На основании наших рассуждений *можно непротиворечиво допустить*: множество рациональных чисел счетное; множество иррациональных чисел континуальное; множество мета рациональных чисел по мощности (в соответствии с диагональным аргументом Г. Кантора) является промежуточным между счетным множеством рациональных чисел и несчетным множеством иррациональных чисел.

Вполне допустимо, что через сто двадцать три года после обозначения Д. Гильбертом своих знаменитых «проблем», первая из них получает логическо-философское разрешение.

Список литературы

1. Шалаев В. П. Становление новой теории общества: на путях становления нового мира // SocioTime / Социальное время. Йошкар-Ола: ПГТУ, 2022. № 4. С. 39–45.
2. Рассел Б. Проблемы философии. Новосибирск: Наука, 2001. С. 93.
3. Ларин С. В. Десятичные дроби. Другая трактовка понятия представимости действительного числа десятичной дробью // Числовые системы. М.: Академия, 2001. С. 76–80, с. 99–100.
4. Годарев-Лозовский М. Г. Мета теоретическая аксиома о различной мощности знаков периодической и непериодической дробей, её основные следствия // IV Российская конференция «Основания фундаментальной физики и математики». М.: РУДН, 2012. С. 213–218.
5. Богомолов С. А. Актуальная бесконечность (Зенон Элейский и Георг Кантор). Петербург: Академия, 1923. С. 12–16.
6. Бесконечность в математике, логике и философии / под ред. А. Г. Барабашева М., 1997. 400 с.
7. Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. 55 с.
8. Понтрягин Л. С. Десятичные дроби. Построение действительного числа // Анализ бесконечно малых. М.: URSS, 2017. С. 24–27, с. 50–55.
9. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел. М.: УРСС, 2003. 187 с. С. 6-7.
10. Хинчин А. И. Восемь лекций по математическому анализу. М.: Наука, 1977. С. 9–24.
11. Шанже Ж. П., Кон А. Материя и мышление. М.–Ижевск, 2004. С. 16.
12. Целищев В. В. Проблема семантической избыточности и определенность континуум-гипотезы в теориях множеств первого и второго порядков // Философия образования. 2016. № 69. С. 9–19.
13. Дедекин Р. Непрерывность и иррациональные числа. М.: URSS, 2015. С. 19–24.

Авторская справка

ГОДАРЕВ-ЛОЗОВСКИЙ Максим Григорьевич – руководитель Лаборатории – кафедры «Прогностические исследования» Института исследований природы времени, г. Москва – Санкт-Петербург, Россия. E-mail: godarev-lozovsky@yandex.ru

UDC 316.4

DOI: 10.25686/2410-0773.2023.3.9

PHILOSOPHICAL SOLUTION OF HILBERT'S FIRST PROBLEM

Godarev-Lozovsky M. G.

Institute for the Study of the Nature of Time, Moscow – Saint Petersburg (Russia)

Introduction. The article provides a philosophical analysis of Hilbert's first problem in the foundations of mathematics and an analysis of attempts to solve it by the scientific community. A new and original approach to its conceptual solution of G. Kantor's continuum hypothesis is proposed.

Methods. The methods used include G. Kantor's diagonal method, Lozovsky's axiom about the different cardinality of the sets of signs of periodic and non-periodic fractions, the results of K. Gödel and P. Cohen on the continuum hypothesis, R. Dedekind's section method, which creates an irrational number.

Results. A potentially infinite set of signs of a periodic fraction has the cardinality of a finite set, and an actually infinite set of signs of a non-periodic fraction has the cardinality of a countable set. Based on this axiom, the following hypothesis is substantiated: on the segment of the number line $[0,999\dots, 1,000\dots]$ there exists: a) an uncountable set of irrational numbers of the form $0,999\dots1415926535\dots$; a finite set of rational numbers of the form $0,999\dots$; an everywhere dense set of metarational numbers of the form $0,999\dots5$. Thus, Hilbert's first problem depends on the distinction between actual and potential infinities, a generalization of the notion of a rational number, and it depends on the answer to the following questions. Are there numbers of another generation on the segment of the number line $[0,999\dots, 1,000\dots]$, that is meta rational: $0,999\dots1$; $0,999\dots2$; $0,999\dots3$; ...and if they exist, does their set have an intermediate cardinality between a countable set and a continuum?

Conclusion. The historical lesson of resolving Hilbert's first problem comes down to the fact that sometimes a fundamental scientific problem is not resolved, but is forgotten, becomes irrelevant for the scientific community, "is driven into a far corner." The philosophical lesson is that problems in the foundations of mathematics are always interdisciplinary and must be solved jointly by philosophers and mathematicians.

Keywords: actual and potential infinity, cardinality of a set, one-to-one correspondence, number line.

References

1. Shalaev V. P. Stanovlenie novoj teorii obshhestva: na putjah stanovlenija novogo mira [The formation of a new theory of society: on the ways of the formation of a new world]. Social'noe vremja. 2022. No. 4. Pp. 39–45. (In Russ.).
2. Rassel B. Problemy filosofii [Problems of Philosophy]. Novosibirsk, Nauka, 2001. P. 93. (In Russ.).
3. Larin S. V. Desjatchnye drobi. Drugaja traktovka ponjatija predstavimosti dejstvitel'nogo chisla desjatchnoj drob'ju [Another interpretation of the concept of representability of a real number as a decimal fraction. In the book. Numerical systems]. V kn. Chislavye sistemy. Moscow, Akademija, 2001. Pp. 76–80, pp. 99–100. (In Russ.).
4. Godarev-Lozovskij M. G. Meta teoreticheskaja aksioma o razlichnoj moshhnosti znakov periodicheskoy i neperiodicheskoy drobej, ejo osnovnye sledstvija [Meta-theoretical axiom about the different power of signs of periodic and non-periodic fractions, its main consequences]. Iy Rossijskaja konferencija «Osnovaniya fundamental'noj fiziki i matematiki». Moscow, RUDN, 2012. Pp. 213–218. (In Russ.).
5. Bogomolov S. A. Aktual'naja beskonechnost' (Zenon Jelejskij i Georg Kantor) [Actual infinity (Zeno of Elea and Georg Kantor)]. Peterburg, Akademija, 1923. Pp.12–16. (In Russ.).

6. Beskonechnost' v matematike, logike i filosofii [Infinity in mathematics, logic and philosophy]. Cb. pod red. Barabasheva A. G. M. 1997. 400 p. (In Russ.).
7. Kantor G. Trudy po teorii mnozhestv [Proceedings on the theory of sets]. Moscow, Nauka, 1985. P. 55. (In Russ.).
8. Pontrjagin L. S. Desjaticnye drobi. Postroenie dejstvitel'nogo chisla [The construction of a real number]. In the book. Analysis of infinitesimals. V kn. Analiz beskonechno malyh. Moscow, URSS, 2017. Pp. 25–27, pp. 50–55 (In Russ.).
9. Pontrjagin L. S. Obobshhenija chisel [Generalizations of numbers]. Moscow, URSS, 2003. 187 c. Pp. 6–7. (In Russ.).
10. Hinchin A. I. Vosem' lekcij po matematicheskomu analizu, gl. Kontinuum [Eight lectures on mathematical analysis, ch. Continuum]. Moscow, Nauka, 1977. Pp. 9–24. (In Russ.).
11. Shanzhe Zh. P., Kon A. Materija i myshlenie [Matter and thinking]. Moscow–Izhevsk, 2004. P. 16. (In Russ.).
12. Celishhev V. V. Problema semanticheskoy izbytochnosti i opredelennost' kontinuum-gipotezy v teoriyah mnozhestv pervogo i vtorogo porjadkov [The problem of semantic redundancy and the certainty of the continuum hypothesis in first and second order set theories]. Filosofija obrazovanija. 2016. No. 69. Pp. 9–19. (In Russ.).
13. Dedekind R. Nepreryvnost' i irracional'nye chisla [Continuity and irrational numbers]. Moscow, URSS, 2015. Pp. 19–24 (In Russ.).

Author's Bio

GODAREV-LOZOVSKY M. G. – Head of the Laboratory-Department of "Prognostic Research", Institute for the Study of the Nature of Time, Moscow – Saint Petersburg, Russia. E-mail: godarev-lozovsky@yandex.ru

Библиографическая ссылка

Годарев-Лозовский М. Г. Философское решение первой проблемы Гильберта // SocioTime / Социальное время. 2023. № 3 (35). С. 9–23. DOI: 10.25686/2410-0773.2023.3.9